Eine genauere und schnellere

Berechnung des Kreises

ohne Radiuswert.

Nach neuen Gesichtspunkten aufgebaut

von

Bernhard Kodatis.

Berlin 1900.
Druck und Verlag von E. Ebering.
Mittelstrasse 29.

Eine genauere und schnellere

Berechnung des Kreises

ohne Radiuswert.

Nach neuen Gesichtspunkten aufgebaut

von

Bernhard Kodatis.

Berlin 1900.
Druck und Verlag von E. Ebering.
Mittelstrasse 29.

Seit den Zeiten des Archimedes rechnet man beim Kreise mit der Verhältniszahl π; denn wir wissen, dass er sie fand zu 7 : 22 und 71 : 223. Jene Zahlen sind vervollkommnet worden, so dass sie 1844 Zacharias Dase auf 200 Dezimalstellen berechnet hat. Immerhin bildet diese Irrationalzahl schon in ihrem Werte selbst einen Fehler, da dieser aber konstant ist, so wird er noch vergrössert durch die Rechnung, so dass er sich um so bemerkbarer macht, je grösser der zu berechnende Kreis ist. Könnte man nun einen Weg finden, der für jeden Kreis an und für sich nur einen Fehler behält, der aber dann auch noch je nach Belieben verringert werden kann, ohne dass erschwerende Rechnungen vorzunehmen sind, so wäre dies schon offenbar ein Vorteil, der darin bestände, dass man nicht jenem konstanten Fehler preisgegeben wäre, sondern das man ihn für den zu berechnenden Kreis je nach Belieben ausgleichen könnte.

Welche Vorteile muss also eine neue lebensfähige Berechnungsart, wenn sie von Wert sein soll, neben einer alten besitzen?

1. Sie soll den unvermeidlichen Fehler so viel als möglich von unveränderlichen fehlerhaften Grössen unabhängig machen, so dass der Fehler an und für sich variabel ist.

2. Dabei soll sie möglichst schnell zum Ziele führen, d. h. den Fehler möglichst schnell verschwindend machen.

3. Sie soll keine rechnerische Schwierigkeit bieten, die den Vorteil gegenüber der alten Formel hinfällig machen würde.

Eine derartige Formel soll sein:

$$P = \frac{\sigma . s}{\cos\gamma . \cos\frac{\gamma}{2} . \cos\frac{\gamma}{2^2} . \cos\frac{\gamma}{2^3} . \ldots \cos\frac{\gamma}{2^n}} .$$

Folgende Sätze entwickeln sie.

I. Zieht man im Kreise eine beliebige Sehne GF, legt durch den Halbierungspunkt B derselben den Radius MA und verbindet den freien Endpunkt des Radius mit einem der Sehne F, legt durch die Mitte D der neuentstandenen Sehne abermals den Radius und verbindet nach derselben Seite hin und fährt so fort, so besteht zwischen den von der Sehne und der Peripherie gebildeten Radiusabschnitten AB und CD der Divisionsquotient $2 \sin \gamma \,.\, \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$, wenn mit $\frac{\gamma}{2}$ der dem kleineren Abschnitt gegenüberliegende Winkel bezeichnet wird. (Siehe Figur 1.)

Voraussetzung:

GF, FA, CF sind Sehnen aus F;
$GB = FB$
$AD = FD$
$AM \perp GF$
$CM \perp FA$

Behauptung:

$$\frac{AB}{CD} = 2 \sin \gamma \,.\, \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

Beweis:

Nach dem Sinussatze ist: $AB = \frac{FB \,.\, \sin \gamma}{\sin \alpha}$

$$CD = \frac{FD \,.\, \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \varphi}.$$

Nun ist aber:

$\alpha = 180^0 - (90^0 + \gamma) = 90^0 - \gamma$; somit $\sin (90^0 - \gamma) = \cos \gamma$

$\varphi = 180^0 - \left(90^0 + \frac{\gamma}{2}\right) = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$; somit $\sin \left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos \frac{\gamma}{2}$

Somit wird:

$$AB = \frac{FB \,.\, \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{FB \,.\, \sin \gamma}{\cos \gamma} = FB \,.\, \operatorname{tg} \gamma.$$

$$CD = \frac{FD \,.\, \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \varphi} = \frac{FD \,.\, \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = FD \,.\, \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

also

$$\frac{AB}{CD} = \frac{FB \,.\, tg\,\gamma}{FD \,.\, tg\,\frac{\gamma}{2}} = \frac{FB \,.\, tg\,\gamma \,.\, ctg\,\frac{\gamma}{2}}{FD} = \frac{FB}{FD} \cdot tg\,\gamma \,.\, ctg\,\frac{\gamma}{2}$$

Es ist aber:

$$FB = r \,.\, \sin 2\gamma = r \,.\, 2 \sin\gamma \,.\, \cos\gamma.$$
$$FD = r \,.\, \sin\gamma$$

Somit:

$$\frac{FB}{FD} = \frac{r \,.\, 2 \sin\gamma \,.\, \cos\gamma}{r \,.\, \sin\gamma} = 2 \cos\gamma$$

und:

$$\frac{FB}{FD} \cdot tg\,\gamma \,.\, ctg\,\frac{\gamma}{2} = 2 \cos\gamma \,.\, tg\,\gamma \,.\, ctg\,\frac{\gamma}{2} = \frac{2 \cos\gamma \,.\, \sin\gamma \,.\, ctg\,\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}$$
$$= 2 \sin\gamma \,.\, ctg\frac{\gamma}{2}$$

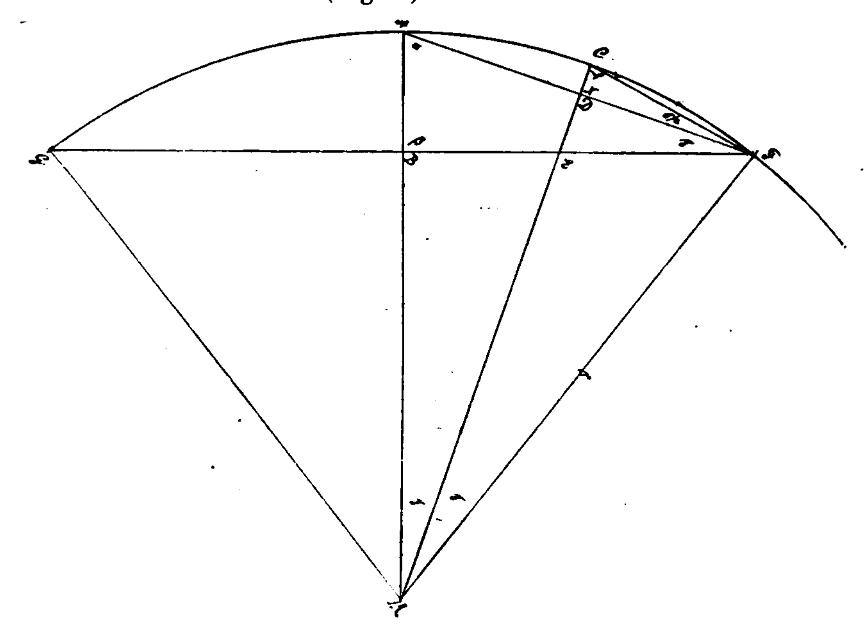
Zum Schluss:

$$\frac{AB}{CD} = 2 \sin\gamma \,.\, ctg\frac{\gamma}{2}$$

II. Verfährt man wie in I, so ist der Teilungsquotient

$$\frac{tg\,\frac{\gamma}{2}}{2 \sin\gamma}$$

Beweis: Es ist (Fig. 1):



$$\frac{AB}{CD} = 2 \sin \gamma \,.\, \mathrm{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{2 \sin \gamma}{\mathrm{tg} \frac{\gamma}{2}}$$

$$\frac{CD}{AB} = \frac{\mathrm{tg} \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \gamma}.$$

Zusatz: Was von den beiden Dreiecken gilt, gilt von allen anderen je zusammengehörigen, denn das gleiche Bildungsgesetz verlangt dieselben Folgerungen nach der Permanenz der Gesetze.

III. Bezeichnet man die je neuentstehende Sehne mit x und die Hälfte der Aufbausehne mit y, so ist für alle Sehnen

$$x = \frac{y}{\cos \gamma}$$

und dieses Verhältnis baut sich aus allen Relationen immer wieder auf. (Fig. 1.)

Voraussetzung: $\angle \gamma$ ist der von der alten und neuen Sehne eingeschlossene Winkel.

Behauptung 1:

$$AF = \frac{FB}{\cos \gamma};\ CF = \frac{FD}{\cos \frac{\gamma}{2}} \text{ u. s. f.}$$

Beweis: Es ist:

$$AF = \frac{r \,.\, \sin 2\gamma}{\sin \alpha} = \frac{r \,.\, 2 \sin \gamma \,.\, \cos \gamma}{\cos \gamma} = r \,.\, 2 \sin \gamma$$

$$FB = r \,.\, \sin 2\gamma = r \,.\, 2 \sin \gamma \,.\, \cos \gamma.$$

Mithin:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{r \,.\, 2 \sin \gamma}{r \,.\, 2 \sin \gamma \,.\, \cos \gamma} = \frac{1}{\cos \gamma}$$

$$\text{und } AF = \frac{FB}{\cos \gamma}.$$

Auf dieselbe Weise wird:

$$CF = \frac{r \,.\, 2 \sin \frac{\gamma}{2} \,.\, \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\gamma}{2}} = r \,.\, 2 \sin \frac{\gamma}{2}$$

$$FD = r \,.\, 2 \sin \frac{\gamma}{2} \,.\, \cos \frac{\gamma}{2}$$

$$\frac{CF}{FD} = \frac{1}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

$$CF = \frac{FD}{\cos \frac{\gamma}{2}}$$

Behauptung 2: Das Verhältnis entsteht bei jeder Relation. (Fig. 1.)

Beweis: z. B. sei

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2}$$

So wird:

$$AB = FB \,.\, tg\, \gamma$$

$$FB = r \,.\, 2 \sin \gamma \,.\, \cos \gamma$$

$$AB = \frac{r \,.\, 2 \sin \gamma \,.\, \cos \gamma \,.\, \sin \gamma}{\cos \gamma} = r \,.\, 2 \sin^2 \gamma$$

$$AB^2 = r^2 \,.\, 4 \sin^4 \gamma$$

$$BF = r \,.\, 2 \sin \gamma \,.\, \cos \gamma$$

$$BF^2 = r^2 \,.\, 4 \sin^2 \gamma \,.\, \cos^2 \gamma$$

$$\begin{aligned} AB^2 + BF^2 &= r^2 \,.\, 4 \sin^4 \gamma + r^2 \,.\, 4 \sin^2 \gamma \,.\, \cos^2 \gamma \\ &= r^2 \,.\, 4 \sin^2 \gamma (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) \\ &= r^2 \,.\, 4 \sin^2 \gamma \end{aligned}$$

Somit:

$$\begin{aligned} \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{r^2 . 4 . \sin^2 \gamma} &= \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{4} \cdot \sqrt{\sin^2 \gamma} \\ &= r \,.\, 2 \sin \gamma. \end{aligned}$$

Also

$$AF = r \,.\, 2 \sin \gamma$$

$$BF = r \,.\, 2 \sin \gamma \,.\, \cos \gamma$$

Daraus ergiebt sich der Quotient $\frac{1}{\cos \gamma}$ und daraus $AF = \frac{BF}{\cos \gamma}$.

Nach dem Zusatz unter II haben diese Relationen für alle nach derselben Weise entstandenen Dreiecke Gültigkeit.

IV. Verfährt man in Konstruktion, wie Figur 1 zeigt

nach Lehrsatz I immerfort, so ist die unendliche Anzahl der in der Unendlichkeit unendlich kleinen Sehnen die Kreislinie selbst, und der Wert der Sehnen gleich dem Werte des Kreisumfanges.

Voraussetzung: Sämtliche Sehnen entstehen auf Grund des Verfahrens nach Satz I.

Behauptung: Der Wert aller Sehnen nähert sich dem Kreiswerte immer mehr und erreicht ihn in der Unendlichkeit.

Beweis: Was von dem Kreissektor GMF in Bezug auf seine Sehnen, das gilt vom ganzen Kreise, denn die Ganzen verhalten sich gleich den Teilen. Es sei der zum Sektor gehörige Bogen mit b bezeichnet, so wird:

$$GF < b$$
$$2 . AF > GF < b$$
$$4 . CF > 2 . AF < b$$
$$8 . HF > 4 . CF < b$$
$$16 . JF > 8 . HF < b$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$y . zF > x . yF < b$$

In der Unendlichkeit ist aber, wenn ε eine unendlich kleine Grösse vorstellt,

$$x . yF + \varepsilon = b$$
$$y . zF = x . yF + \varepsilon$$

Mithin $y . zF = b$.

V. Zeichnet man ein beliebiges, einem Kreise einbeschriebenes Polygon und bezeichnet eine beliebige Sehne mit s und die Anzahl aller Sehnen (Seiten) mit σ, ausserdem mit γ den vierten Teil des Polygoncentriwinkels, so wird die Peripherie des Kreises an Wert:

$$P = \frac{\sigma . s}{\cos\gamma . \cos\frac{\gamma}{2} . \cos\frac{\gamma}{2^2} . \cos\frac{\gamma}{2^3} \ldots \cos\frac{\gamma}{2^n}}.$$

Beweis: Es verhalten sich die Ganzen wie die Teile.

Es ist: $$AF = \frac{BF}{\cos\gamma}$$

$$2\,AF = \frac{2\,BF}{\cos\gamma} = \frac{s}{\cos\gamma}$$

$$4\,CF = \frac{2\,AF}{\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{s}{\cos\gamma\,.\,\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$8\,HF = \frac{4\,CF}{\cos\frac{\gamma}{4}} = \frac{s}{\cos\gamma\,.\cos\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\gamma}{2^2}}$$

$$y\,.\,zF = \frac{s}{\cos\gamma\,.\cos\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\gamma}{2^2}\dots\cos\frac{\gamma}{2^n}}$$

und für $\sigma(y\,.\,zF) = \dfrac{\sigma\,.\,s}{\cos\gamma.\cos\frac{\gamma}{2}.\cos\frac{\gamma}{2^2}.\cos\frac{\gamma}{2^3}\dots\cos\frac{\gamma}{2^n}}$.

Diese Formel giebt zwar den Wert des Kreisumfanges, ist aber aus gewissen Gründen so noch nicht verwendbar.

Einmal werden die Winkel bald so klein (was ja das spezifisch Vorteilhafte eigentlich ist), dass die Logarithmen versagen, denn in der Tabelle von Gauss beginnt schon mit 28′ der Kosinuslogarithmus nur noch aus 9 zu bestehen.

Das andere Mal aber sind die Newtonschen Kosinus- und Sinusreihen nicht anwendbar, weil in ihnen ja mit π gerechnet worden ist; hierin liegt auch der Fehler der Logarithmenrechnung für diesen Punkt, weil ja die Logarithmen der kleinen Winkel wohl zumeist nach jenen Reihen entstanden sind.

Soll nun aber der Wert im Nenner der Formel ganz genau werden, so muss er aus algebraischen Ausdrücken bestehen. Nun ist aber die Formel

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}\,(1 + \cos\gamma)}$$

nicht anwendbar, weil sich gar bald unüberwindlich scheinende Rechnungsschwierigkeiten einstellen. Es muss also eine andere Beziehung zwischen den Kosinen halber Winkel gesucht werden. Zur Auffindung einer geeigneten Relation dient Satz I.

$$\text{VI.}\qquad 1 - \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\,.\,(1 - \cos\gamma)}{2\sin\gamma}$$

oder:

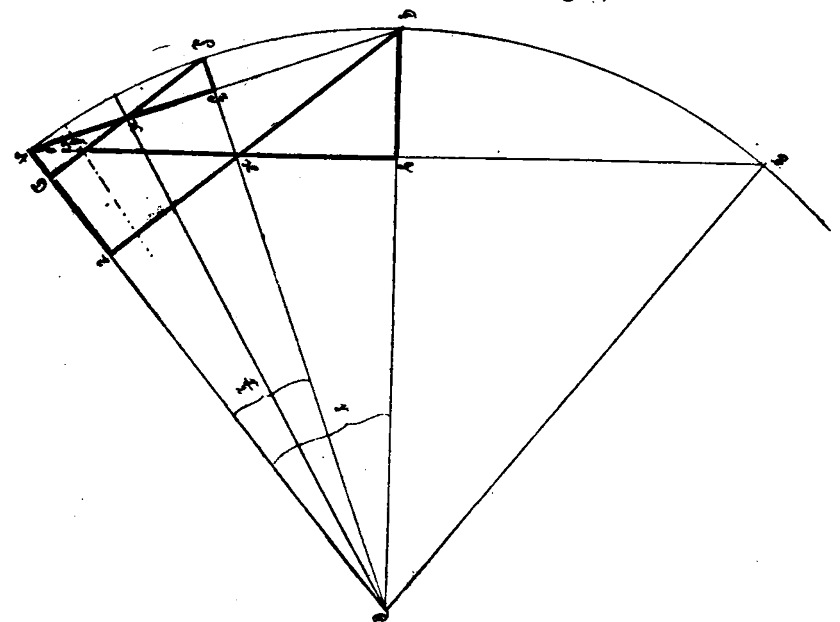
$$\sin \operatorname{vers} \frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} . \sin \operatorname{vers} \gamma}{2 \sin \gamma}$$

also:

$$\cos \frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} . \sin \operatorname{vers} \gamma}{2 \sin \gamma}.$$

Dem Anschein nach hat diese Beziehung wenig Aussicht auf Anwendbarkeit, weil in der Formel selbst ja der halbe Winkel verbunden ist. Dies ist aber nur der Schein. Es muss daran erinnert werden, dass die Radiusabschnitte immer in einem gleichbleibenden Verhältnis stehen, und nun sind die Radiusabschnitte gleich den sin vers der betreffenden Winkel. Man wird also ein recht passendes Winkelverhältnis nehmen, um die betreffende Relation zu finden.

VI a. Die gebildeten Radiusabschnitte sind gleich den sin vers der betreffenden Winkel (s. Figur).



Voraussetzung: Konstruktion nach I.
Behauptung: FG = AE; LJ = AD u. s. f.
Beweis 1:

AB ist Sehne
AF ist Sehne
AG = BG; mithin FC $\perp$ AB.

$\triangle$ HCF $\cong$ HCA;
FC = AC
HC = CH
$\angle$ ACL = $\angle$ FCL

— $\triangle$ HCG $\cong$ HCE;
HC = CH
$\angle$ ACL = $\angle$ FCL
$\angle$ HGC = $\angle$ HEC als R nach Konstr.

$\triangle$ FGH $\cong$ AEH
FG = AE.

Ferner $\triangle$ LJK $\cong$ ADK; denn
Beweis 2:
$\angle$ LJK = $\angle$ ADK als R nach Konstr.
$\angle$ LKJ = $\angle$ AKD als Scheitelw.
JK = DK; denn: $\triangle$ JKC $\cong$ DKC
KC = CK
$\angle$ KCJ = $\angle$ KCD
$\angle$ KJC = $\angle$ KDC

LJ = AD.

Dasselbe Resultat muss sich immer wieder ergeben, da nach dem letzten Beweise jede nach demselben Bildungsgesetze entstandenen Dreiecke kongruent sind.

Somit wird:

$$\frac{FG}{LJ} = \frac{AE}{AD} = 2 \sin \gamma \, . \, \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \quad \text{oder} \quad \frac{AD}{AE} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \gamma}$$

Somit

$$AD = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \, . \, AE}{2 \sin \gamma}$$

und

$$\sin \operatorname{vers} \frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \, . \, \sin \operatorname{vers} \gamma}{2 \sin \gamma}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = 1 - \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \,.\, \sin \operatorname{vers} \gamma}{2 \sin \gamma}$$

Um das Verhältnis recht schnell zu finden, wird man, da die Grösse des Winkels keinen Einfluss hat, mit Vorteil den Winkel $= 30^0$ nehmen; alsdann wird das Verhältnis

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{2 \sin \gamma} = \frac{\operatorname{tg} 15^0}{2 \sin 30^0} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 \,.\, {}^1/_2} = 2 - \sqrt{3},$$

wodurch sich das Verhältnis ergiebt:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = 1 - (2 - \sqrt{3}) \,.\, \sin \operatorname{vers} \gamma.$$

Dieser Ausdruck ergiebt ohne Schwierigkeiten den Kosinus des halben Winkels aus dem ganzen in algebraischen Ausdrücken.

Bei der Zeichnung möchte ich noch auf eine Eigentümlichkeit aufmerksam machen, die immer eintrifft, man mag $\angle \gamma$ jeden beliebigen Wert geben.

Nimmt man nämlich ACB $= \angle \varphi$, so schneidet sich die Sehne des ganzen Winkels und die Sinuslinie des halben mit dem Schenkel des Viertelwinkels in einem Punkte; ebenso dieselbe Sehne, die Sinuslinie des Viertel- und der Schenkel des Sechszehntelwinkels und so fort.

Zum Schlusse möchte ich auf folgendes hinweisen: Es war das Bestreben meiner letzten Arbeiten dahin gerichtet, den Kosinusausdruck im Nenner in eine geometrische, fallende Progression zu verwandeln, was mir bis jetzt jedoch nicht gelungen ist. Sollte dieses möglich sein, so ist offenbar das Problem der Rektifikation und der Quadratur des Kreises gelöst, indem sich ja alsdann der volle Wert des Nenners angeben lässt. Wohl aber ist es möglich, den Wert im Nenner nach dem Binomaltheorom zu berechnen. Man setze alsdann

$$\sin \operatorname{vers}\frac{\gamma}{2} = \sin \operatorname{vers} \gamma \,.\, q; \quad \sin \operatorname{vers} \gamma = (1 - a); \quad q = 2 - \sqrt{3}$$

So wird:

Sinus versus

$\gamma = (1 - a), \frac{\gamma}{2} = (1 - a) q, \frac{\gamma}{4} = (1 - a) q^2$ etc. und setzt man

$= \quad a_1, \quad = \quad a_2, \quad = \quad a_3 \ldots,$

so wird der Nennerwert:

$$(1 - a_1) . (1 - a_2) . (1 - a_3) \ldots,$$

welcher Ausdruck nach dem Binomaltheorom berechenbar ist, da man a_1 a_2 a_3 u. s. w. kennt.

Der Wert

dieser neuen Methode besteht nun in folgendem: Ohne Radiuswert ist es möglich, jeden Kreiswert zu bestimmen. Es sei z. B. ein Kurvenstück von ungefähr $^1/_7$ Kreisumfang gegeben. Man wird, da γ und φ bekannt sind (Fig. 1), das eingeschriebene Dreieck konstruieren, dessen Basis gleich der Achteckseite ist, um aus dem Werte dieser alsdann, da ja der Nenner für jeden Fall berechnet werden kann, jeden Kreiswert ableiten zu können. Andererseits kann ebensoleicht umgekehrt verfahren und ohne Schwierigkeiten der Wert einer Seite eines beliebigen regelmässigen Poligons aus dem Kreiswerte abgeleitet werden.

Wenn ich zur Erläuterung hier Beispiele folgen lasse, so muss ich dazu folgendes bemerken. Trotzdem ich vorher darauf hinwies, dass die Logarithmen der Kosinen kleiner Winkel nicht recht anwendbar seien, vollführe ich die Rechnung mit ihnen aus doppeltem Grunde. Einmal ist es bekannt, dass man aus dem Verschwinden in regelmässigen Intervallen gewisser Teile einer funktionellen Grösse auf ihren wahren Wert schliessen kann; so, dass man auch hier im Stande ist, den Wert wohl ohne Fehler anzugeben. Ein andermal aber verbieten es mir leider die Verhältnisse, die Rechnung im Nenner in algebraischer Form durchzuführen, mithin den Raum dieses Heftchens zu vergrössern. Jene Rechnung bietet in der Ausführung in keiner Hinsicht Schwierigkeiten, sondern stellt ein ganz mechanisches Multiplizieren dar. Auch dem Anschein, dass die Rechnung sich langwierig gestalte, thut der Gedanke Einhalt, dass z. B. dem Winkel $\frac{\gamma}{512}$, beim Sechseck somit $\frac{15^0}{512} = 1\frac{97'}{128}$,

ein Polygon mit Centriwinkel von $3\frac{33'}{64}$, also ein 6144-Eck entspricht; mithin einen Wert darstellt, der wohl kaum noch einen merklichen Fehler einschliesst. Bis zu dem genannten Winkel sind neun Multiplikationen vorzunehmen, was aber verliert, wenn man bedenkt, dass die meisten Wurzelgrössen in Quadratzahlen bei gegenseitiger Multiplikation übergehen und es ganz den Anschein hat, als bauen sich die einzelnen Faktoren nach einem bestimmten Gesetze auf. Ich habe zur Rechnung das Sechseck genommen, weil mit dem Radius zugleich die Sehne gegeben ist; ich lasse es dahingestellt, ob sich die Kosinusausdrücke anderer Winkel nicht besser zur Rechnung eignen würden.

Rechnung für den Nenner (logarithmisch)

Der Sechseckcentriwinkel $= 60^0$

Kosinus

$\frac{\angle C}{4} = 15^0;\quad \gamma = 15^0 \qquad \log \gamma = 9.98494-10$

$\frac{\gamma}{2} = 7^0 30' \qquad \log \frac{\gamma}{2} = 9.99627-10$

$\frac{\gamma}{4} = 3^0 45' \qquad \log \frac{\gamma}{4} = 9.99907-10$

gerundete Ausdrücke: $\frac{\gamma}{8} = 1^0 52' 30'' \qquad \log \frac{\gamma}{8} = 9.99977-10$

$\frac{\gamma}{16} = 56' 15'' \qquad \log \frac{\gamma}{16} = 9.99994-10$

$\log P = 9.97999-10$

Von jetzt ab soll, um das Verschwinden der letzten Stelle zu verfolgen, partiell multipliziert werden.

Es war $\log P$ bis $\frac{\gamma}{16}$ 9.97999—10 letzte Stelle 9

$\frac{\gamma}{32} = 23' + \log \frac{\gamma}{32}$ 9.99999—10

9.97998—10 „ „ 8

Von nun an hören in der Tabelle von Gauss die Kosinen auf, einen von 1 abweichenden Wert zu besitzen. Offenbar ist 1 zu gross angenommen, drum setzen wir, da genauere Werte fehlen, auch keinen merklichen Einfluss mehr ausüben würden, dass sie von 9.99999 abweichen, die Kosinen der folgenden Winkel = 9.99999—10.

$$
\begin{array}{rlr}
 & 9.97998-10 & \\
\frac{\gamma}{64} = 11'30'' \quad \log \frac{\gamma}{64} = & 9.99999-10 & \\
\hline
 & 9.97997-10 & 7 \\
+ \log \frac{\gamma}{128} = & 9.99999-10 & \\
\hline
 & 9.97996-10 & 6
\end{array}
$$

Es zeigt sich, dass der Logarithmus sich stets gleich bleibt, bis auf die letzte Stelle, die in gleichen Intervallen um gleiche Werte sinkt; somit ist der Endwert offenbar, der angestrebt wird:

$$\log z = 9.97994-10.$$

Um einzusehen, dass der Endwert wirklich zwischen 9.97994—10 und 9.97995—10 liegen muss, ist folgendes von Nutzen:

Es ist $\sin \text{vers} \frac{\gamma}{2} = \sin \text{vers}\, \gamma\,.\,(2 - \sqrt{3})$ in diesem Falle

$\log\ (2 - \sqrt{3}) = 9.42800-10.$

$$
\begin{array}{rl}
\log \sin \text{vers} \frac{\gamma}{16} = & 6.18641-10 \\
+ & 9.42800-10 \\
\hline
 & 5.61441-10 \text{ numlog von } 1 = \\
 & 1{,}000\,000\,000 \\
 & -\ 0{,}000\,041\,154 \\
\hline
 & 0{,}999\,958\,846 = \cos \frac{\gamma}{32}
\end{array}
$$

muss mithin noch als log 9.99999 gesetzt werden.

Dasselbe wird notwendig bis $\frac{\gamma}{256}$, wo man aber nicht weiter gehen darf, da man die Fehler, um die 9.99999—10 zu klein ist, den kleineren Winkelkosinen zu gute rechnen muss.

So erhält man als ungefähres Endglied 9.97994—10 mit $\frac{\gamma}{256}$ als Kosinus im Bruch 0,999 999 208 68, den man im Logarithmus noch 9.99999—10 als Endglied setzen darf, mit ihm aber, der Fehler wegen, abbrechen muss, obwohl der Kosinus der kleineren Winkel noch eine gute Zeit hin noch nicht 1 wird. Dennoch ist die Rechnung mit dieser

Grösse schon genau genug, um ganz merkliche Unterschiede hervorzurufen, was Beispiele zeigen sollen:

$r = 24$
$d = 48 \qquad U = d \cdot \pi = 150{,}79632$

$s = r = 24$
$\sigma = 6\ ;\ \sigma \cdot s = 144. \qquad \log 144 = 2.15836$

$$\begin{array}{rl} -\log z & = 9.97994-10 \\ \hline \log U_1 & = 2.17842 \\ \text{numlog} = U_1 & = 150{,}81 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} U_1 = & 150{,}81000 \\ -U = & 150{,}79632 \\ \hline D(U_1 - U) = & 0{,}01368 \text{ Einheiten.} \end{array}$$

$r = 48;\ d = 96;\ U = 301{,}59264$
$s = r = 48;\ \sigma = 6;\ \sigma \cdot s = 288; \quad \log 288 = 2.45939$

$$\begin{array}{rl} -\log z & = 9.97994-10 \\ \hline \log U_1 & = 2.47945 \\ \text{numlog} = U_1 & = 301{,}62 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} U_1 = & 301{,}62000 \\ -U = & 301{,}59264 \\ \hline D(U_1 - U) = & 0{,}02736. \end{array}$$

Es wächst somit der Fehler bei π, wie behauptet, der Grösse des Radius proportional.

Um sich die Annäherung oder den Unterschied zu vergegenwärtigen, nehme man z. B. die minimale Grösse von 24 Einheiten, deren Unterschied zu 0.01 Einheiten gesetzt sei. Er liefert bei

24 cm = 0,01 cm = 0,1 mm
24 m = 0,01 m = 1 cm
24 km = 0,01 km = 10 m und bei

6366,7425 km = (ungefähr) 265,2609 × 24 km schon als Unterschied ungefähr 265,2609×10 = 2652,609 m = 2,65261 km; d. h. rechnet man den Umfang der Erde nach dem Radius des ihr im Meridian gleichen Kreises wie angegeben, so ist der Umfang um ungefähr $2\,^2/_3$ km dem wahren Wert näher.

Noch bemerkbarer wird der Fehler bei der Inhaltsberechnung, es wird beim Kreise von $R = 48$:

$$J = 7228{,}79859$$
$$J_1 = 7238{,}66666 \quad \text{nach der Formel:}$$
$$D(J_1 - J) = 9{,}86807$$

$$J = \frac{r}{2}\left(\frac{\sigma \cdot s}{\cos\gamma \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \ldots \cos\frac{\gamma}{2^n}}\right)$$

und beim Kugelvolumen von R = 12; nach der Formel:

$$V = \frac{2}{3}\left[r^2 \cdot \left(\frac{\sigma \cdot s}{\cos\gamma \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \ldots \cos\frac{\gamma}{2^n}}\right)\right]$$

$$V_1 = 7238{,}666 \ldots$$
$$V = 7238{,}000$$
$$D(V_1 - V) = 0{,}666 \ldots$$

Radius.	Kreisumfang.		Differenz.
	Neue Methode.	Alte Methode.	
15	94,254	94,248	0,006
15,5	97,41	97,40	0,01
16	100,543	100,53	0,013
16,5	103,675	103,66	0,015
17	106,826	106,81	0,016
17,5	109,970	109,953	0,017
	Kreisinhalt		
15	706,90	706,86	0,04
15,5	754,82	754,77	0,05
16	804,30	804,25	0,05
16,5	855,36	855,30	0,06
17	907,98	907,92	0,06
17,5	962,18	962,11	0,07
	Kugelvolumen		
15	14138,066	14136,66	1,4
15,5	15599,46	15598,00	1,46
16	17158,52	17157,00	1,52
16,5	18818,00	18816,00	2
17	20581,30	20579,00	2,30
17,5	24451,00	24448,50	2,50